

Rappel: Théorème de Rolle.

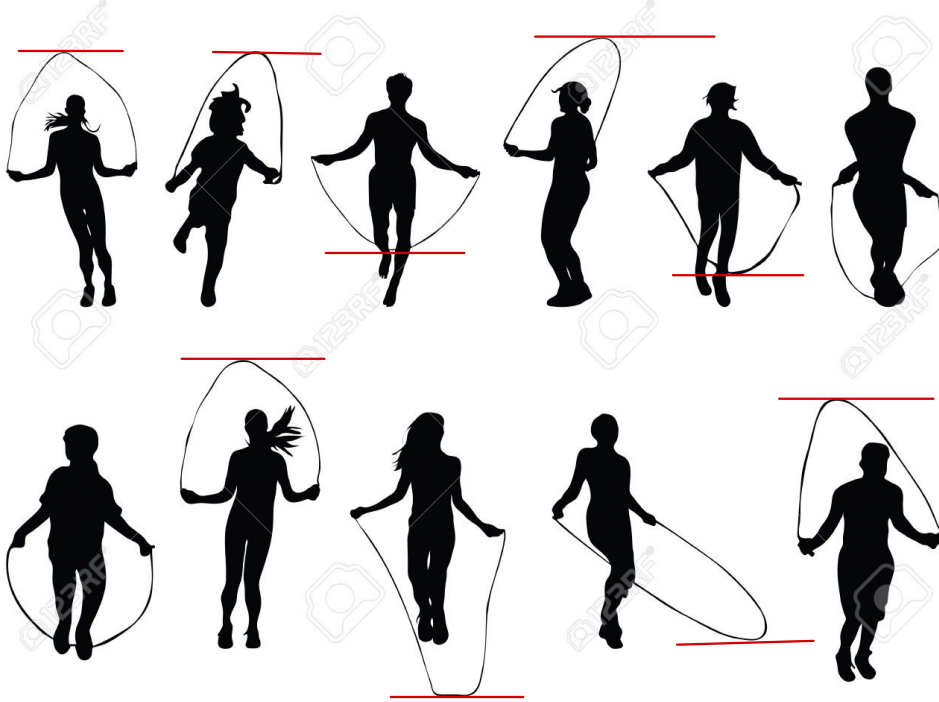
Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow F$ telle que

(1) $f: [a, b] \rightarrow F$ est continue

(2) f est dérivable sur $]a, b[$

(3) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Il existe toujours
une tangente horizontale
pour une corde suspendue
entre deux points de même hauteur

Remarque Si $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \alpha$,
où $\alpha = +\infty$ ou $-\infty$ $\Rightarrow$ il existe $c \in]a, b[$: $f'(c) = 0$.

Ex. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$

continue sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$$x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) - \cancel{x^2} \sin(\frac{1}{x}) (\cancel{-\frac{1}{x^2}}) =$$

$$= 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) \text{ bien défini } \forall x \neq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \underbrace{\cos(\frac{1}{x})}_{\text{bornée}} = 0$$

$f(x)$ est paire $\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) \Rightarrow$ Thm de Rolle $\exists c \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[: f'(c) = 0.$

$$f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2}{y} \cos y + \sin y = 0 \stackrel{\cos y \neq 0}{\Rightarrow} \tan y = -\frac{2}{y}.$$

$$x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\Rightarrow y \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

l'équation possède un nombre ∞ de solutions

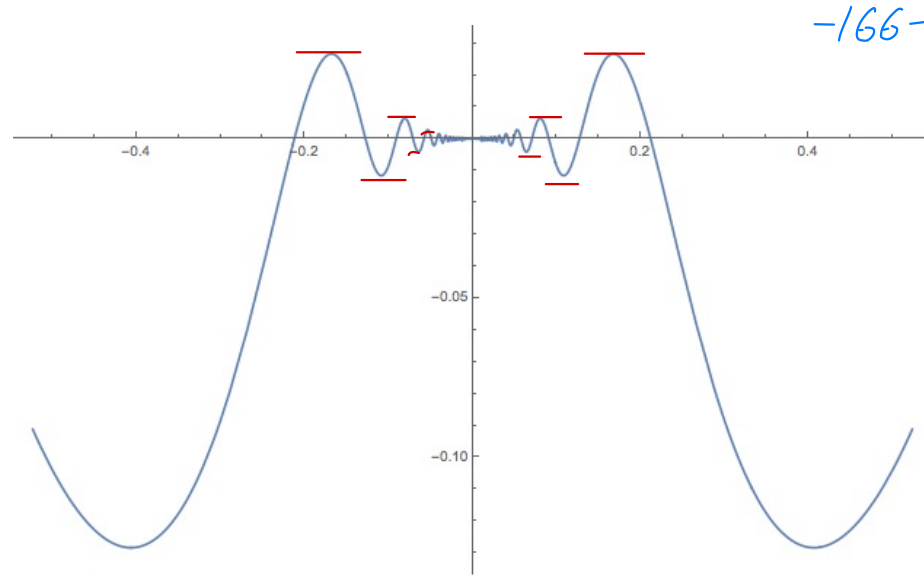
$\Rightarrow$ aussi pour $f'(x) = 0, x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$

Remarque. $f(x)$ est un exemple d'une fonction dérivable sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, mais pas de classe $C^1(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) \\ \text{Si } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est dérivable sur }]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x)$ est continue

mais $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}))$ n'existe pas $\Rightarrow f'(x)$ n'est pas continue en $x = 0$
 $\Rightarrow$ pas de classe $C^1(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$.



Théorème des accroissements finis (TAF)

-167-

$a < b$; $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

(1) f est continue sur $[a, b]$
(2) f est dérivable sur $]a, b[$

$\Rightarrow$ Il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque: Si $f(a) = f(b) \Rightarrow$ on retrouve le Thm de Rolle.

Dém: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la droite passant par $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

L'équation de cette droite: $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

Soit $g(x) \stackrel{\text{dét}}{=} f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$\Rightarrow g(a) = 0$, $g(b) = 0$; $\Rightarrow g(a) = g(b)$

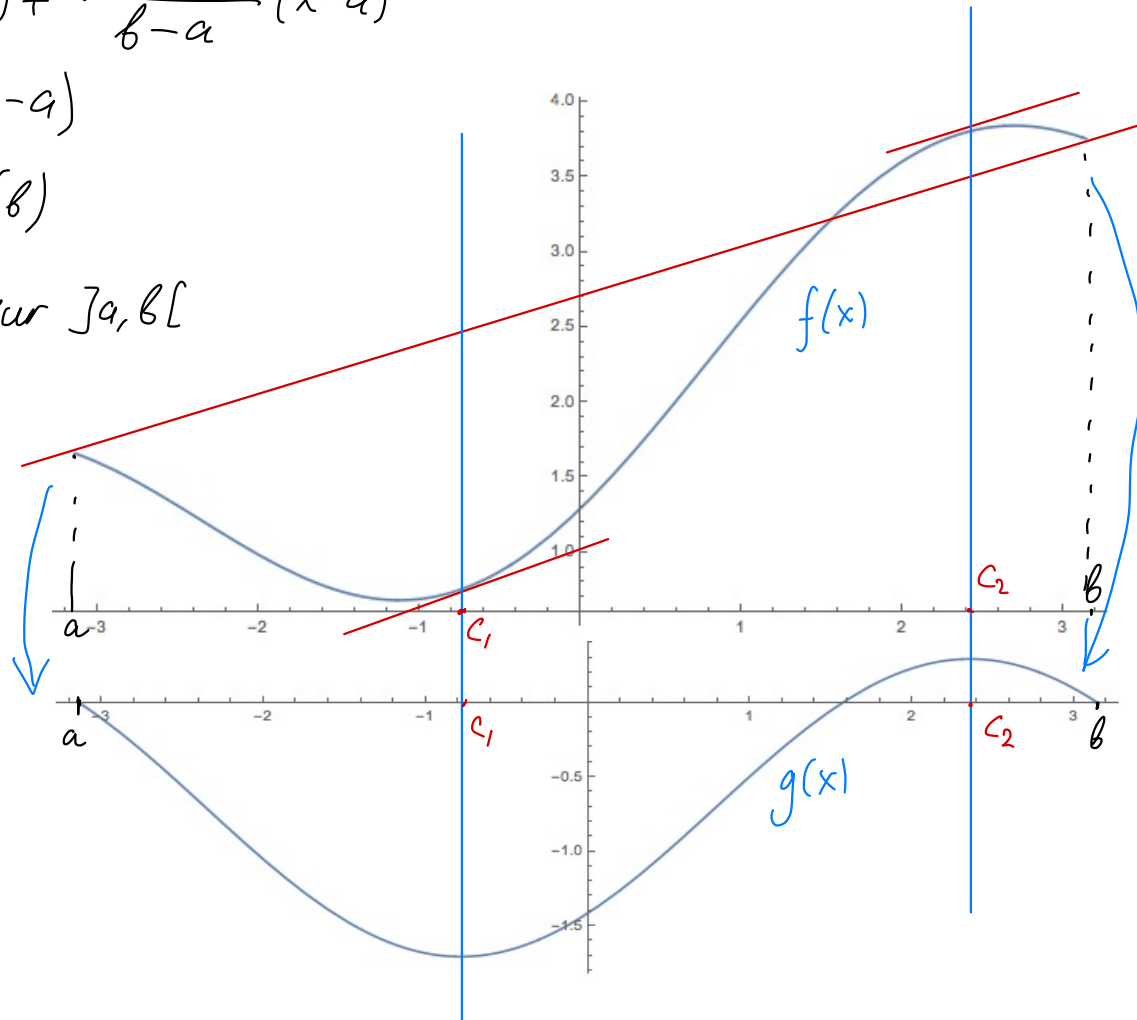
$g(x)$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

$\Rightarrow$ le Thm de Rolle s'applique $\Rightarrow$

$\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0$.

$\Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □



Corollaire 1 Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Alors f est constante sur $[a, b]$. -168-

Dém: Par contraposée: Supposons $\exists c_1, c_2 : f(c_1) \neq f(c_2) \Rightarrow$ Par TAF $\Rightarrow \exists d \in]c_1, c_2[: f'(d) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} \neq 0$ contradiction avec $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$ ▢

Corollaire 2. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues-dérivables sur $]a, b[$ et telles que $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x) = g(x) + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire 3. $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ est croissante (décroissante) sur $]a, b[$

$f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ est strictement croissante (strictement décroissante) sur $]a, b[$

Dém: (1) $f(x) \uparrow \Rightarrow$ Si $x > c \Rightarrow f(x) \geq f(c)$
Si $x < c \Rightarrow f(x) \leq f(c) \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\geq 0} \geq 0$

$\Rightarrow f'(c) \geq 0 \quad \forall c \in]a, b[$. Le cas $\downarrow$ est similaire.

(2) Soit $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Supposons que $\exists x_1 < x_2 \in]a, b[: f(x_1) > f(x_2)$
f n'est pas croissante $\searrow$
f n'est pas strictement croissante $\nearrow$

-169-

$\Rightarrow$ par TAF $\exists c \in]x_1, x_2[: f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{\leq 0}{\underset{> 0}{< 0}} \leq 0 \Rightarrow \text{contradiction.}$ 

Remarque. Si $f(x)$ est strictement croissante, cela n'implique pas que $f'(x) > 0 \forall x \in]a, b[$.

Ex. $f(x) = x^3$ sur $[-1, 1]$ strictement croissante, mais $f'(0) = 0$.

Ex. Démontrer que l'équation $x + \log x = 0$ a exactement une solution réelle.

$f(x) = x + \log x$ continue, dérivable sur $]0, +\infty[$

$f(1) = 1 + \log 1 = 1 > 0$

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} + \log \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - \log e = \frac{1}{e} - 1 < 0$

$\Rightarrow$ Par TVI $\exists$ au moins une solution $c \in]\frac{1}{e}, 1[$.

Supposons qu'il existe au moins 2 solutions $\Rightarrow \exists a < b \in]0, \infty[: f(a) = f(b) = 0$

$\Rightarrow$ Par le Thm de Rolle $\exists d \in]a, b[: f'(d) = 0$.

Par contre, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \forall x \in]0, +\infty[\Rightarrow$ il existe au plus une solution $f(x) = 0$.

$\Rightarrow$ Finalement, il existe exactement une solution réelle de $x + \log x = 0$.

Théorème. $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

(1) f, g sont continues sur $[a, b]$
 (2) f, g sont dérivables sur $]a, b[$
 et $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$.

$\Rightarrow$ il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dém. Voir [DZ §5.3.1].

§5.4. Règle de Bernoulli-L'Hospital.

Théorème Soient $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a, b[$.
 $a < b$

Si

(1) $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$
 (2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$

Dém. On considère le cas $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$.

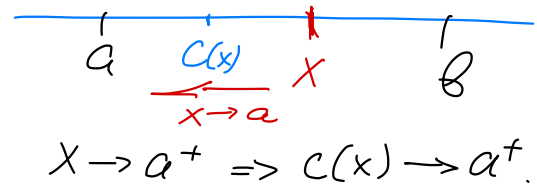
Posons $f(a) = g(a) = 0 \Rightarrow f(x), g(x)$ sont continue en $x = a$ à droite.

$\Rightarrow$ Par TAF généralisée sur $[a, x]$, $\forall x \in]a, b[$. $\exists c(x) : a < c(x) < x$

$$\text{et } \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \int$$

existe



Remarques. (1) On peut remplacer $\lim_{x \rightarrow a^+}$ par $\lim_{x \rightarrow b^-}$ ou $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$.

(2) La non-existence de $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'implique pas la non-existence de $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$, mais $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ n'existe pas!

Soit $a_k = 2k\pi \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(2k\pi)}{1 + \cos(2k\pi)} = 0$; soit $b_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = 1$

Aussi, on ne peut pas calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ par $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$

parce que (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ n'existent pas.

(2) $g(x) = 1 + \cos x = 0$ et $g'(x) = -\sin x = 0$ en nombre infini de points pour x arbitrairement grands $\Rightarrow$ BL ne s'applique pas.

Règle de Bernoulli - L'Hospital

$f, g: \{x \in I, x_0 \neq x\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

(1) f, g dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$
et $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

Applications.

Ex 1. $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \stackrel{BL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Ex 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \stackrel{BL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Ex 3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x^2} \log(\cos(2x))} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \log(\cos(2x)) = ?$

forme indéterminée 1^∞

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \log(\cos(2x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \log(\cos(2x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } x=0$$

$$g'(x) = 2x \Rightarrow g'(x) \neq 0 \quad \text{--- " ---} \Rightarrow \text{BL est applicable}$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{1}{\cos(2x)} (-\sin(2x)) \cdot 2}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2 \cdot (-3)}{\cos(2x)} = -6 \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{On a: } (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{\frac{3}{x^2} \log(\cos(2x))}$$

$$e^x \text{ est continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x^2} \log(\cos(2x))} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

